Esercizi sulle funzioni in generale

Gli esercizi con uno * sono leggermente più difficili.

(1) Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Completare le seguenti affermazioni in maniera corretta.

a) Se f è crescente e g è crescente, allora $g \circ f$ è *crescente*

b) Se f è crescente e g è decrescente, allora $g \circ f$ è *decrescente*

c) Se f è decrescente e g è crescente, allora $g \circ f$ è *decrescente*

d) Se f è decrescente e g è decrescente, allora $g \circ f$ è *crescente*

e) Se f è costante, allora $g \circ f$ è *costante*

f) Se g è costante, allora $g \circ f$ è *costante*

(2) Trovare un esempio di funzioni $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove f non è crescente e $g \circ f$ è crescente.

Basta prendere g e f decrescenti. P.es. $f(x) = -x$ e $g(x) = 2^{-x}$, di modo che $(g \circ f)(x) = 2^x$.

(3) Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2^x$. Scrivere $g \circ f$ e $f \circ g$. Sono la stessa funzione?

$(g \circ f)(x) = 2^{x^2+1} \neq 2^{2x} + 1 = (f \circ g)(x)$.

(4) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 - x$. Mostrare che f non è iniettiva.

$f(x) = x(x+1)(x-1)$, quindi $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$: f non è iniettiva.

(5) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 + x$. E' iniettiva? (Suggerimento: mostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $a^2 + \mathrm{ab} + b^2 \geqslant 0$).

Sì, è iniettiva. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. $f(x) = f(y)$ sse $x^3 + x = y^3 + y$ sse $0 = x^3 - y^3 + x - y = (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y) = (x^2 + xy + y^2 + 1)(x-y)$ sse $x = y$ o $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$. Ma la seconda uguaglianza non ha luogo perché $x^2 + xy + y^2 + 1 \geqslant 1$ (vedi sotto), quindi $x = y$. Cioè, $f(x) = f(y)$ implica che $x = y$, cioè f è iniettiva.

Abbiamo usato il fatto che $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Vi sono diverse maniere per farlo, la più semplice essendo un completamento di quadrato: $x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$.

Altrimenti si possono considerare separatamente i casi $y = 0$ (ovvio) e $y \neq 0$ (si pone $t = \frac{x}{y}$ e si riduce il tutto a una disequazione di secondo grado in t, che è sempre verificata).

(6) La funzione $f(x) = 2^x$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva? E' suriettiva?

E' iniettiva (è strettamente crescente!), ma non suriettiva ($2^x = -1$ non ha soluzioni).

(7) Sia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Calcolare $(f \circ f)(x)$ per i valori di x per cui ciò ha senso. Ricavarne un'espressione per $(f \circ f \circ f)(x)$.

Prima i calcoli: $(f \circ f)(x) = x$ per ogni valore di x per cui l'espressione ha senso. L'unica condizione è $x \neq 1$. Ne segue che $(f \circ f \circ f)(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ per $x \neq 1$.

(8) Sia $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Calcolare $f \circ f(x)$ per i valori di x per cui ciò ha senso.

$f \circ f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$, per $x \neq 0, -1$.

(9) Siano $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = \frac{n}{n+1}$ e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Determinare dominio, codominio ed espressione esplicita di $f \circ a$. (Ho corretto un grave refuso!)

Prima il calcolo. $(f \circ a)(n) = \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+n^2}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

(*1) Quante funzioni esistono aventi come dominio l'insieme $\{a,b,c\}$ e come codominio l'insieme $\{0,1\}$?

Per ciascuno dei tre elementi del dominio posso scegliere tra due elementi del codominio e le tre scelte sono indipendenti. Ho quindi $2 \times 2 \times 2 = 8$ *possibili scelte per le immagini di* a,b,c. *La risposta è* 8.

(*2) Quante funzioni suriettive esistono aventi come dominio l'insieme $\{a,b,c\}$ e come codominio l'insieme $\{0,1\}$?

Faccio una lista: ce ne sono due dove $f(a)=0$ *e* $f(b)=1$ *(basta scegliere l'immagine di* c*) e ce ne sono due tali che* $f(a)=1$ *e* $f(b)=0$. *C'è il caso in cui* $f(a)=f(b)=0$ *(e allora dev'essere* $f(c)=1$ *per preservare la suriettività), e quello in cui* $f(a)=f(b)=1$. *In tutto* $2+2+1+1=6$ *casi. (Potevo anche ragionare più brevemente, osservando che ce ne sono esattamente due che* ***non*** *sono suriettive, quindi quelle suriettive sono* $8-2=6$*).*

(*3) Quante funzioni esistono aventi come dominio l'insieme $\{0,1\}$ e come codominio l'insieme $\{a,b,c\}$?

$3 \times 3 = 9$.

(*4) Quante funzioni iniettive esistono aventi come dominio l'insieme $\{0,\ 1\}$ e come codominio l'insieme $\{a,b,c\}$?

Una volta fissata l'immagine di 0 *(e posso farlo in tre modi) devo fissare una diversa immagine di* 1 *(e mi rimangono* 2 *modi per farlo):* $3 \times 2 = 6$.